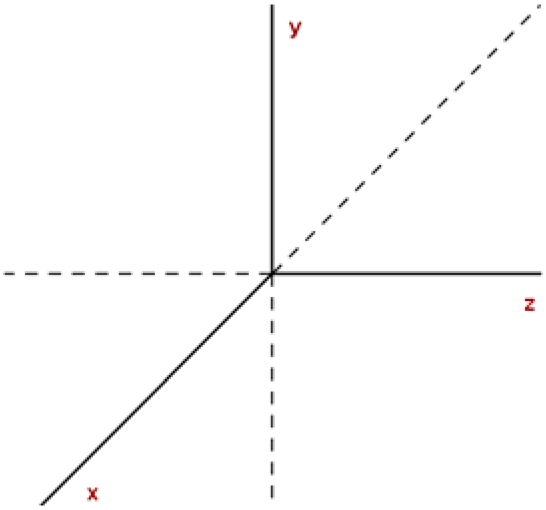
Vectores en el espacio

Un **sistema de coordenadas tridimensional** se construye trazando un eje Z, perpendicular en el origen de coordenadas a los ejes X e Y.

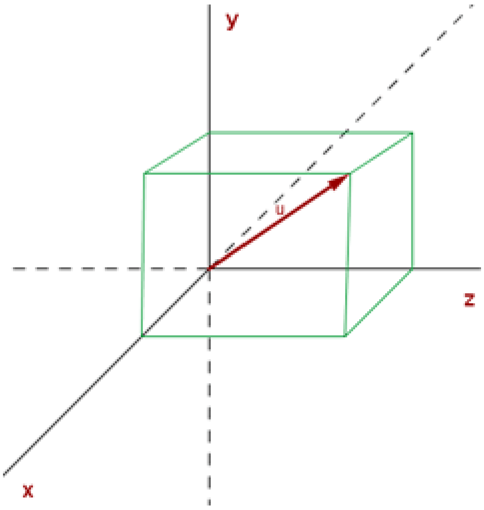
Cada **punto** viene determinado por **tres coordenadas P(x, y, z)**.



Los ejes de coordenadas determinan tres planos coordenados: XY, XZ e YZ.

Vector en el espacio

Un **vector en el espacio** es cualquier **segmento orientado** que tiene su **origen** en un punto y su **extremo** en el otro.



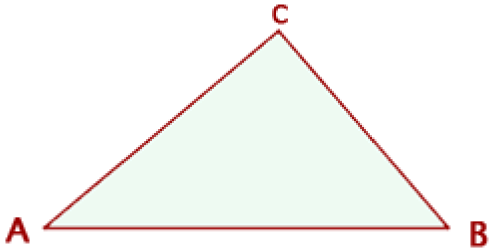
Componentes de un vector en el espacio

Si las coordenadas de A y B son: $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ Las **coordenadas o componentes del vecto**r $\overrightarrow{AB}$ se obtienen restando a las coordenadas del extremo las del origen.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Ejemplo:

Determinar la **componentes de los vectores** que se pueden trazar en el triángulo de vértices A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C(−1, 2, 1).



$\overrightarrow{AB} = (3+3, 6-4, 3-0) = (6, 2, 3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{BA} = (-6, -2, -3)$

$\overrightarrow{AC} = (-1+3, 2-4, 1-0) = (2, -2, 1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{CA} = (-2, 2, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (-1-3, 2-6, 1-3) = (-4, -4, -2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{CB} = (4, 4, 2)$

Módulo de un vector

El **módulo** de un **vector** es la **longitud** del **segmento** orientado que lo define.

El **módulo** de un **vector** es un **número** siempre **positivo** y solamente el **vector nulo** tiene módulo **cero**.

Cálculo del módulo conociendo sus componentes

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Dados los vectores y , $\vec{u} = (3, 1, -1)$ $\qquad$ $\vec{v} = (2, 3, 4)$ hallar sus módulos

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$$

Cálculo del módulo conociendo las coordenadas de los puntos

$A(x_1, y_1, z_1)$ $\qquad$ $B(x_2, y_2, z_2)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)}$$

Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** es igual al **módulo del vector** que determinan dichos puntos.

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)}$$

Hallar la **distancia entre los puntos** A(1, 2, 3) y B(2, 3, −1).

$$d(AB) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}$$

Vector unitario

Un **vector unitario** tiene **de módulo la unidad.**

Normalizar un vector consiste en asociarle otro **vector unitario**, de la **misma dirección** y **sentido** que el vector dado. Para ello se divide cada componente del vector por su módulo.

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$$

Operaciones con vectores en el espacio

Suma de vectores

Para sumar dos vectores se suman sus respectivas componentes.

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\qquad$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Ejemplos

Dados $\vec{u}$ = (2, 1, 3), $\vec{v}$ = (1, −1, 0), $\vec{w}$ = (1, 2, 3), hallar el vector

$\vec{X}$= 2u + 3v − w.

$\vec{X}$ = (4, 2, 6) + (3, −3, 0) − (1, 2, 3) = (6, −3, 3)

Dados los vectores $\vec{u}(2,4,5)$ y $\vec{v}(3,1,2)$ hallar el módulo del vector . $\vec{u} - \vec{v}$

$$\vec{u} - \vec{v} = (2,4,5) - (3,1,2) = (-1,3,3)$$

$$\left|\vec{u} - \vec{v}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}$$

Propiedades de la suma de vectores

Asociativa

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Conmutativa

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Elemento neutro

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Elemento opuesto

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Producto de un número real por un vector

El **producto de un número real k** ∈ ℝpor un **vector** $\vec{u}$ es otro **vector**:

De **igual dirección** que el vector $\vec{u}$.

Del **mismo sentido** que el vector $\vec{u}$ **si k es positivo**.

De **sentido contrario** del vector $\vec{u}$ **si k es negativo**.

De **módulo** $|k| \cdot |\vec{u}|$

Las componentes del vector resultante se obtienen multiplicando por K las componentes del vector.

$$k \cdot \vec{u} = (ku_1 + ku_2 + ku_3)$$

Propiedades del producto de un número por un vector

Asociativa

k · (k' · $\vec{u}$) = (k · k') · $\vec{u}$

Distributiva respecto a la suma de vectores

k · ($\vec{u}$ + $\vec{v}$) = k · $\vec{u}$ + k · $\vec{v}$

Distributiva respecto a los escalares

(k + k') ·$\vec{u}$ = k · $\vec{u}$+ k' · $\vec{u}$

Elemento neutro

1 · $\vec{u}$= $\vec{u}$

Ejemplo

Dado $\vec{v}$= (6, 2, 0) determinar $\vec{u}$ de modo que sea 3$\vec{u}$ = $\vec{v}$.

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v} = \left(2, \frac{2}{3}, 0\right)$$

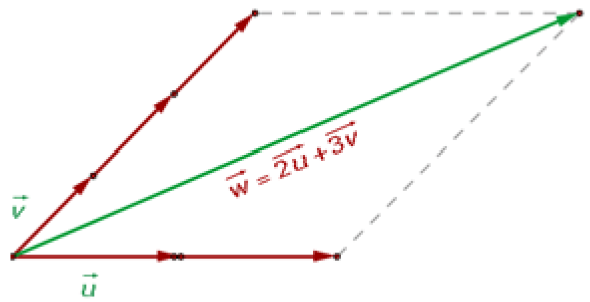
Dependencia e independencia lineal. Bases

Combinación lineal

Una **combinación lineal** de dos o más vectores es el **vector** que se obtiene al **sumar** esos **vectores multiplicados** previamente por **escalares**.

$$v = a_1 \overrightarrow{v_1} + a_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n \overrightarrow{v_n}$$

Ejemplo:



Cualquier **vector** se puede expresar como **combinación lineal** de un conjunto de vectores que tengan **distinta dirección**.

$$\vec{w} = \overrightarrow{2u} + \overrightarrow{3v}$$

Esta **combinación lineal** es única.

Vectores linealmente dependientes

Un conjunto de **vectores libres** del plano se dice que son **linealmente dependientes** si hay una **combinación lineal** de ellos que es igual al **vector cero**, con la condición de que alguno de los **coeficientes** de la **combinación** lineal distinto de cero**.**

$$a_1\ \vec{v_1} + a_2\ \vec{v_2} + \cdots + a_n\ \vec{v_n} = \vec{0}$$

Propiedades

1. Si un conjunto de **vectores** son **linealmente dependientes**, entonces al menos **uno** de ellos se puede expresar como **combinación lineal** de los demás.

Si son linealmente dependientes

$$a_1\ \vec{v_1} + a_2\ \vec{v_2} + \cdots + a_3\ \vec{v_3} = \vec{0}$$

Con alguno de los coeficientes distinto de cero. Despejando tendremos:

$$\vec{v_1} = -\frac{a_2}{a_1}\vec{v_2} - \frac{a_3}{a_1}\vec{v_3}$$

También se cumple el reciproco: si un **vector** es **combinación lineal** de otros, entonces los **vectores** son **linealmente dependientes**.

2.Dos vectores del plano son **linealmente dependientes** si, y sólo si, son **paralelos**.

3.Dos **vectores libres** del plano $\vec{u}\ \vec{u}$ = $(u_1,\ u_2)$ y $\vec{v}\ \vec{v}$ = $(v_1,\ v_2)$ son **linealmente dependientes** si sus componentes son proporcionales.

$$\vec{u} = k\vec{v} \qquad\qquad (u_1, u_2, u_3) = (kv_1, kv_2, kv_3)$$

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_1} = \frac{u_3}{v_3} = k$$

Por las propiedades de los determinantes, se cumplirá que:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo

Determinar los valores de k para que sean **linealmente dependientes** los vectores $\vec{u} = (3, k, -6)$, $\vec{v} = (-2, 1, k+3)$ y $\vec{w} = (1, k+2, 4)$,y escribir $\vec{u}$ como **combinación lineal** de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, siendo k el valor calculado.

Los vectores son **linealmente dependientes** si el **determinante** de la matriz que forman es **nulo**, es decir que el rango de la matriz es menor que 3.

$$\begin{vmatrix} 3 & k & -6 \\ -2 & 1 & k+3 \\ 1 & k+2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$12 + k^2 + 3k + 12k + 24 - \left(-6 - 8k + 3k^2 + 15k + 18\right) = 0$$

$$k^2 - 4k - 12 = 0 \qquad k = -2 \qquad k = 6$$

$$\left(3, -2, -6\right) = a\left(-2, 1, 1\right) + b\left(1, 0, 4\right)$$

$$\left(3, -2, -6\right) = \left(-2a + b, a, a + 4b\right)$$

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \\ -2 = a \\ -6 = a + 4b \end{cases} \qquad a = -2 \qquad b = -1$$

$$\vec{u} = -2\vec{v} - \vec{w}$$

Vectores linealmente independientes

Varios vectores libres son **linealmente independientes** si ninguno de ellos puede ser escrito con una **combinación lineal** de los restantes.

$$a_1 \, \vec{v_1} + a_2 \, \vec{v_2} + \cdots + a_n \, \vec{v_n} = \vec{0}$$

$\mathbf{a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0}$

Los **vectores linealmente independientes** tienen **distinta dirección** y sus **componentes** no son **proporcionales**.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ejemplos

1. Estudiar si son **linealmente dependientes o independientes** los vectores:

$\vec{u}$=(2, 3, 1), $\vec{v}$ = (1, 0, 1), $\vec{w}$ = (0, 3, −1)

a (2, 3, 1) + b(1, 0, 1) + c (0, 3, −1) = (0, 0, 0)

$$\begin{cases} 2a+b=0 \\ 3a+3c=0 \\ a+b-c=0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Como el rango es 2 y el número de incógnitas 3, resulta un **Sistema compatible indeterminado**.

El sistema tiene infinitas soluciones, por tanto los vectores son **linealmente dependientes**.

Base

Tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$,con **distinta dirección** forman una **base**, cuando cualquier **vector** del espacio se puede expresar como **combinación lineal** de ellos.

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

Las **coordenadas del vector** respecto a la **base** son:

$$\vec{x} = (a, b, c)$$

Base ortogonal

Una **base** es **ortogonal** si los vectores de la base son **perpendiculares** entre sí.

Base normada

Es aquella constituida por vectores **unitarios**, es decir, de módulo la unidad.

Base ortonormal

Una **base** es **ortonormal** si los vectores de la base son **perpendiculares** entre sí, y además tienen **módulo 1**.

$$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \qquad \vec{j} = (0, 1, 0) \qquad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$$

$$\vec{i} \perp \vec{j} \qquad \vec{j} \perp \vec{k} \qquad \vec{k} \perp \vec{i}$$

Esta base formada por los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ se denomina **base canónica**.

Ejemplo

¿Para qué valores de *a* los vectores $\vec{u}(1,1,1)$, $\vec{v}(1,a,1)$ y $\vec{w}(1,1,a)$, forman una **base**?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

$$a^2 + 1 + 1 - a - a - 1 \neq 0 \qquad a^2 - 2a + 1 \neq 0$$

$$(a-1)^2 \neq 0 \qquad a \neq 1$$

Para a ≠ 1, los **vectores** forman una **base**.

Producto escalar

El **producto escalar** de **dos vectores** es un **número real** que resulta al **multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman**.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\alpha$$

Expresión analítica del producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3$$

Ejemplo

Hallar el **producto escalar** de dos vectores cuyas coordenadas en una base ortonormal son: (1, 1/2, 3) y (4, −4, 1).

(1, 1/2, 3) · (4, −4, 1) = 1 · 4 + (1/2) · (−4) + 3 · 1 = 4 −2 + 3 = 5

Expresión analítica del módulo de un vector

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + u_3 \cdot u_3} = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}$$

Ejemplo:

Hallar el valor del **módulo de un vector** de coordenadas $\vec{u}$ = (−3, 2, 5) en una base ortonormal.

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}$$

Expresión analítica del ángulo de dos vectores

$$\cos\alpha = \frac{u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3}{\sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}} \cdot \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2}}}$$

Ejemplo:

Determinar el **ángulo** que forman los **vectores** $\vec{u}$ = (1, 2, −3) y $\vec{v}$= (−2, 4, 1).

$$\cos\alpha = \frac{-2+8-3}{\sqrt{1+4+9}\,\sqrt{4+16+1}} = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \frac{3}{7\sqrt{6}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3}{7\sqrt{6}}\right) = 79.92°$$

Vectores ortogonales

Dos **vectores** son **ortogonales** si su **producto escalar es 0**.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ analíticamente $u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3 = 0$

Los vectores ortogonales son perpendiculares entre sí.

Ejemplo

Calcular los valores x e y para que el vector (x, y, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2, 1, −1).

$(x, y, 1) \perp (3, 2, 0)$ $3x + 2y = 0$

$(x, y, 1) \perp (2, 1, -1)$ $2x + y - 1 = 0$

$x = 2$ $y = -3$

Propiedades del producto escalar

1Conmutativa

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2 Asociativa

$$k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

3 Distributiva

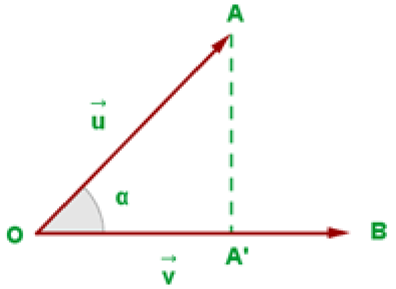
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

4 El producto escalar de un vector no nulo por sí mismo siempre es positivo.

$$\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$$

Interpretación geométrica del producto escalar

El producto de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



$$\cos\alpha = \frac{OA'}{|\vec{u}|} \qquad OA' = |\vec{u}| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot OA'$$

OA' es la proyección del vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, que lo denotamos como $\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}$

$$\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|}$$

Ejemplo

Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3, 5)$ y $\vec{v} = (6, -1, 0)$ hallar:

1. Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{37}$$

2. El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$·

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 6 + (-3) \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = 15$$

3. El ángulo que forman.

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{15}{\sqrt{38}\sqrt{37}} = 0.4$$

$$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \operatorname{arc}\cos 0.4 = 66.42°$$

4. La proyección del vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

$$\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{15}{\sqrt{37}}$$

5. La proyección del vector $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

$$\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{15}{\sqrt{38}}$$

6. El valor de m para que los vectores $\vec{u} = (2, -3,5)\ y\ (m, 2,3)$ sean ortogonales.

$$2m - 6 + 15 = 0 \qquad m = -\frac{9}{2}$$

Cosenos directores

En una base ortonormal, se llaman **cosenos directores** del vector $\vec{u} = (x, y, z)$, a los cosenos de los ángulos que forma el vector $\vec{u}$ con los vectores de la base.

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Se cumple que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Ejemplo

Determinar los **cosenos directores** del vector (1, 2, −3).

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{14}}$$

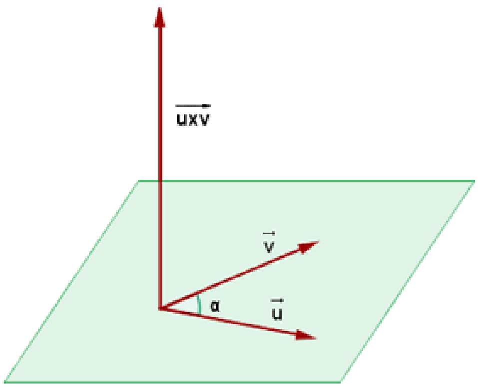
$$\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{9}{14} = 1$$

Producto vectorial

El **producto vectorial** de **dos vectores** es otro **vector** cuya **dirección** es **perpendicular** a los dos vectores y su **sentido** sería igual al avance de un **sacacorchos** al girar de u a v.

Su **módulo** es igual a:

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| \operatorname{sen}\alpha$$



El **producto vectorial** se puede expresar mediante un **determinante**:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Ejemplos

Calcular el **producto vectorial** de los vectores $\vec{u} = (1, 2{,}3)\ y\ \vec{v} = (-1, 1, 2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \vec{\imath} + 5\,\vec{\jmath} - 3\,\vec{k}$$

Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, hallar el **producto vectorial** de dichos vectores. Comprobar que el vector hallado es **ortogonal** a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \qquad (-2,-2,4)\cdot(3,-1,1) = -6 + 2 + 4 = 0$$

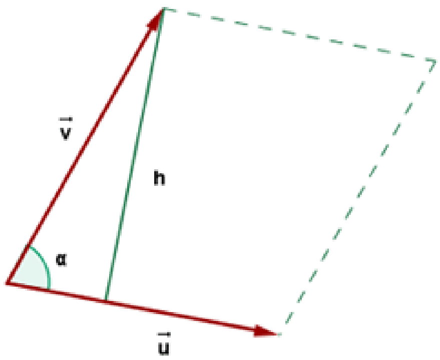
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v} \qquad (-2,-2,4)\cdot(1,1,1) = -2 - 2 + 4 = 0$$

El producto vectorial de $\vec{u}$ x $\vec{v}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Área del paralelogramo

Geométricamente, el **módulo del producto vectorial** de dos vectores coincide con el **área del paralelogramo** que tiene por lados a esos vectores.

$$A = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



Ejemplo

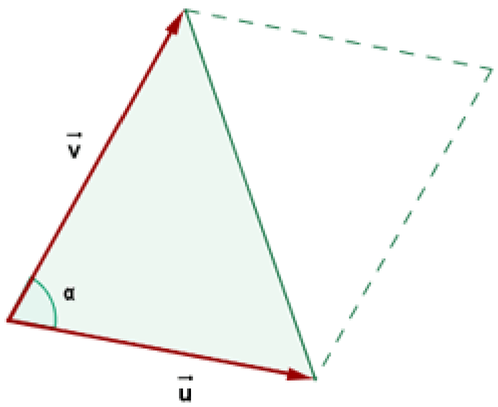
Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}\,u^2$$

Área de un triángulo

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$$



Ejemplo

Determinar el **área del triángulo** cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 3), B(2, −1, 5) y C(−3, 3, 1).

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2) \qquad \overrightarrow{AC} = (-4, 2, -2)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = 0\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{w} = (0, -6, -6)$$

$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\, u^2$$

Propiedades del producto vectorial

1. Anticonmutativa

$\vec{u}\, x\, \vec{v} \;=\; -\, \vec{v}\, x\, \vec{u}$

2. Homogénea

$\lambda\, (\vec{u}\, x\, \vec{v}) = (\lambda\vec{u}\,)\ \mathrm{x}\ \vec{v} = \vec{u}\ \mathrm{x}\ (\lambda\, \vec{v})$

3. Distributiva

$\vec{u}\, x\ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\, x\, \vec{v} + \vec{u}\, x\, \vec{w}$

4. El **producto vectorial** de dos **vectores paralelos** en igual al **vector nulo**.

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

5. El **producto vectorial** $\vec{u} \times \vec{v}$ es **perpendicular** a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$

Producto mixto

El **producto mixto** de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al **producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos**.

El **producto mixto** se representa por [$\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$].

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$$

El **producto mixto** de tres vectores es igual al determinante que tiene por filas las coordenadas de dichos vectores respecto a una base ortonormal.

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplos

Calcular el **producto mixto** de los vectores:

$$\vec{u} = (2, -1, 3) \quad \vec{v} = (0, 2, -5) \quad \vec{w} = (1, -1, -2)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right) = (2, -1, 3) \cdot (-9, -5, -2) = -18 + 5 - 6 = -19$$

Volumen del paralelepípedo

El valor absoluto del **producto mixto** representa el **volumen del paralelepípedo** cuyas aristas son tres vectores que concurren en un mismo vértice.

Ejemplo

Hallar el **volumen del paralelepípedo** formado por los vectores:

$$\vec{u} = (3, -2, 5) \quad \vec{v} = (2, 2, -1) \quad w = (-4, 3, 2)$$

$$V = \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91u^3$$

Volumen de un tetraedro

El **volumen de un tetraedro** es igual a **1/6 del producto mixto**, en valor absoluto.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Obtener el **volumen del tetraedro** cuyos vértices son los puntos A(3, 2, 1), B(1, 2, 4), C(4, 0, 3) y D(1, 1, 7).

$$\overrightarrow{AB} = (1-3, 2-2, 4-1) = (-2, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4-3, 0-2, 3-1) = (1, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1-3, 1-2, 7-1) = (-2, -1, 6)$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right|$$

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 3 - 12 - 4 = 5$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6}u^3$$

Propiedades del producto mixto

1. El **producto mixto** no varía si se permutan circularmente sus factores, pero cambia de signo si éstos se trasponen.

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \left[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right] = \left[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\right]$$

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = -\left[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\right] = -\left[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\right] = -\left[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\right]$$

2. Si **tres vectores** son **linealmente dependientes**, es decir, si son **coplanarios**, **producto mixto vale 0**.